

## **ANÁLISIS INTERNO DE LA EVOLUCIÓN DEL LIBRO DE TEXTO *LECCIONES DE GEOMETRÍA ANALÍTICA*, DE SANTIAGO MUNDI Y GIRÓ**

**José Javier Escribano Benito; Luis Español González**

IES Valle del Cidacos de Calahorra; Universidad de la Rioja

*Palabras clave: S. Mundi, siglo XIX, siglo XX, Geometría Analítica, España.*

A deep Analysis of the Evolution of *Lecciones de geometría analítica*, a Text by Santiago Mundi y Giró

*Summary: The analysis is carried out by taking at starting point the Programa (1880) defended by Mundi in his competitive examination. Although Lecciones first edition dates from 1883, it is necessary to wait for the second one (1893) in order to find a development in line with this Programa. The third edition keeps virtually the same structure but some important innovations have been introduced on the concepts.*

*Key words: S. Mundi, 19th Century, 20th Century, Analytic Geometry, Spain.*

### **1. Introducción**

Santiago Mundi y Giró (1842-1915) ha sido estudiado en anteriores *Trobades* de forma tangencial por Serrat, Nuñez y Montanuy (1997) y con detalle por Llombart (1997). El objetivo de esta comunicación es continuar el trabajo de este último aportando un análisis de la obra más significativa del autor: *Lecciones de Geometría analítica* (1883, 1893, 1904) tomando como punto de partida el *Programa razonado de Geometría Analítica* (1880) que Mundi defendió en sus oposiciones<sup>1</sup>.

La obra de Mundi representa un eslabón entre los textos de geometría métrica de Cortázar (1855) y Sánchez Solís (1883), y el *Tratado de Vegas* (1906) donde la geometría métrica aparece como un caso particular de la geometría proyectiva. Así, en las *Lecciones* de Mundi se aprecia, a lo largo de sus tres ediciones, un avance continuado hacia la geometría proyectiva pero sin llegar a dar una formulación explícita de la misma.

<sup>1</sup>. Agradecemos al profesor José Llombart el habernos suministrado una copia de este documento inédito.

## 2. El Programa razonado y las Lecciones de Mundi

El *Programa razonado* propuesto por Mundi supone una clara apuesta por la modernización de la enseñanza de la geometría analítica mediante la inclusión de conceptos y métodos de la geometría proyectiva. Aunque la primera edición de las *Lecciones* data de 1883, es necesario esperar hasta la segunda, 1893, para encontrar un desarrollo que se ajuste al mencionado *Programa*. La tercera edición de 1904 mantiene prácticamente la misma estructura que la anterior pero, en la introducción de los conceptos, se observan importantes novedades que reflejan cómo mejora, con el ejercicio de la cátedra, el conocimiento que el autor posee de la geometría analítica del siglo XIX, especialmente en el tema de las transformaciones y en el tratamiento de aspectos métricos con método proyectivo. Junto con las coordenadas cartesianas (oblicuas y rectangulares) y las polares (esféricas en el espacio), el autor considera también las triangulares (tetraédricas) y las tangenciales pero tan sólo como un artificio para simplificar las expresiones, sin llegar a una introducción sistemática de tipo proyectivo. Se declara seguidor de Painvin (*Géométrie analytique*), si bien pretende introducir los diferentes tipos de coordenadas a medida que estas sean necesarias y no al principio de la teoría como hace el citado autor. El *Programa* no recoge las coordenadas homogéneas, más adecuadas para tratar los problemas proyectivos. Mundi introduce estas coordenadas en la tercera edición (1904) de sus *Lecciones*.

Otro aspecto importante es el empleo de los elementos imaginarios. La introducción de estos conceptos en las *Lecciones* supone un avance respecto de los textos de Córdazar o Sánchez Solís, pero la utilización que de los mismos realiza es muy limitada.

Las lecciones 11 (Transversales), 12 (Razón armónica) y 13 (Homografía. Involución) están dedicadas al estudio de propiedades de tipo proyectivo (incidencia de rectas, colineación de puntos) pero no son propiamente de geometría proyectiva. Sobre el origen histórico de estos temas, Mundi cita a Desargues, Pascal, Carnot (*Geometría de la posición*), Pappus, Pascal, Simpson, Brianchon, Poncelet y Chasles.

Introduce una sección dedicada a la circunferencia (esfera) con la idea de generalizar sus propiedades, a la manera de Poncelet, en el estudio de las cónicas (superficies de 2º orden). En todo caso, la materialización de esta idea en la 2ª y 3ª edición (en la 1ª la circunferencia surge como un caso particular de la elipse) no pasa de ser un mero recurso didáctico para habituar al alumno con un caso particular antes de proceder a un estudio más general.

Una buena parte del *Programa* (20 lecciones) está dedicada al estudio de las cónicas consideradas como secciones de un cono y como ecuaciones de 2º grado. Sigue, por tanto, el mismo planteamiento que Córdazar pero en la introducción de los elementos notables encontramos cambios importantes que muestran la evolución del autor, como se puede observar en el cuadro siguiente:

Concepto	<i>Lecciones</i> , 1ª ed. (1883)	<i>Lecciones</i> , 2ª ed. (1993), 3ª ed. (1904)
Centro	Punto que divide por la mitad todas las cuerdas que pasan por él.	Polo de la recta que está situada en el infinito.
Diámetro	Lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas.	A toda polar de un punto que esta situado en el infinito.
Tangente	Es el límite de posición de una secante que gira alrededor de sus puntos de intersección hasta que un segundo punto de intersección está a una distancia infinitamente pequeña del primero.	
Asíntota	Es la recta que puede acercarse indefinidamente a una rama infinita de modo que la distancia de los puntos de la curva a la asíntota llegue a ser menor que una cantidad asignable por pequeña que esta sea.	Se llama asíntota a una curva a toda tangente cuyo punto de contacto está en el infinito. Éste puede considerarse como punto doble, en la intersección de la asíntota con la curva.
Polo y polar	Polar es el lugar geométrico de los puntos armónicos conjugados de un punto llamado polo respecto de la intersección de la curva con todas las secantes que parten del polo.	
Foco	Un punto situado en el plano cuya distancia a otro cualquiera de la curva, es función racional de primer grado de las coordenadas de ese punto.	Es todo punto para el cual las rectas conjugadas respecto a la cónica son todas perpendiculares entre sí.
Directriz	La recta que viene representa por la función anterior igualada a cero.	La polar de un foco.

La última sección de cada una de las partes (plano y espacio) está dedicada al estudio de diversas propiedades agrupadas bajo el epígrafe de «Teorías generales». Entre éstas, Mundi concede gran importancia a las «anotaciones abreviadas» (notación abreviada de Plücker) que permiten «simplificar los cálculos algebraicos y facilitar las demostraciones», y al concepto de transformación en el plano y en el espacio. Los cambios atañen a los contenidos (véase los cuadros que se insertan posteriormente), que se amplían considerablemente, y a la presentación de los mismos, que se vuelve más sintetizada y ordenada de lo general a lo particular.

### 3. Metodología

Desde el punto de vista didáctico las *Lecciones* constituyen un texto claro, bien estructurado, más moderno que los de Cortázar y Sánchez Solís y más asequible para alumnos y profesores que el *Tratado* de Vegas. Esto justificaría el gran éxito de la obra, que fue adoptada como libro de texto en numerosas facultades y escuelas superiores de España e Hispanoamérica.

El autor supone que los alumnos dominan las teorías auxiliares para el estudio de la

analítica: determinantes (hace un uso continuado para simplificar las expresiones), teoría de proyecciones en el plano y las transformaciones de las series de fracciones iguales. En el desarrollo está también implícito que el alumno dispone de unos conocimientos de geometría sintética adquiridos en la asignatura de *Geometría*.

En su *Programa* introduce diversas justificaciones –no todas acertadas– de tipo histórico, en ellas parece observarse una mayor precisión en la geometría sintética que en la analítica y en los avances del primer tercio del siglo XIX que en los posteriores. A lo largo del programa se cita a Chasles, sin precisar la obra, en diversas ocasiones y, de hecho, parece clara la influencia de su *Aperçu historique* (1837).

Concede gran importancia a la resolución de problemas y utiliza una metodología diferente en el plano y en el espacio. En el plano realiza los cálculos a la vista de los alumnos, en el espacio los escribe con antelación en el encerado, resaltando así la importancia de la explicación frente al mecanismo algorítmico. Aunque Mundi considera este método una «innovación», su empleo venía siendo habitual en las Academias Militares (Velamazán 1991: 1310). En realidad las diferencias van más allá de los métodos seguidos en la exposición de los conceptos, como puede comprobarse en el tratamiento de las cónicas y de las cuádricas.

Los exámenes de la asignatura se ajustaban a un cuestionario editado con anterioridad. Así, el editado en 1884 (Mundi 1884) recogía 84 preguntas de examen cada una de las cuales constaba de tres partes: una cuestión de analítica plana, otra del espacio y un problema «fácil».

## Bibliografía

- CHASLES, M. (1837), *Aperçu historique sur l'origine et développement des méthodes en Géométrie*, Bruxelles, Hayez.
- CORTÁZAR, J. (1855), *Tratado de Geometría analítica*, Madrid, Agustín Espinosa.
- LLOMBART, J. (1997), «La oposición a la Cátedra de Geometría Analítica de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona (1881). Cronología Biográfico-Científica de Santiago Mundi (1842-1915)». En: *Actes de les IV Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. (Alcoi-Barcelona, SCHCT, 1997), 553-561.
- MUNDI, S. (1880), *Programa razonado de Geometría Analítica*. Programa presentado para participar en las oposiciones a la cátedra de Geometría Analítica de la Universidad de Barcelona. Manuscrito fechado a 31-08-1880, 58 p.
- (1883), *Lecciones de Geometría analítica*, Barcelona, Tipografía «La Academia».
- (1893), *Lecciones de Geometría analítica*, 2a. ed., Barcelona, Establecimiento Tipográfico de la Casa P. de Caridad.
- (1894), *Asignatura de Geometría Analítica. Cuestionario de examen*, Barcelona, Establecimiento Tipográfico de la Casa P. de Caridad.
- (1904), *Lecciones de Geometría analítica*, 3a. ed, Barcelona.
- SÁNCHEZ SOLÍS, I. (1883), *Geometría analítica. Programa y resumen de las lecciones explicadas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central*, Madrid, G. Juste.
- SERRAT, J.; NUÑEZ, J. M.; MONTANUY, M. (1994), «La Geometría en las instituciones catalanas del siglo XIX: La Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona». En: J. M. Camarasa; H. Mielgo; A. Roca (coord.), *Actes de les I Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. SCHCT, Barcelona.

VEGAS, M. (1906), *Tratado de Geometría*, Tomo I, 2a. edición, Madrid.

VELAMAZAN, M. A.; AUSEJO, E. (1991), «La enseñanza de las Matemáticas en la Academia de Ingenieros en España en el siglo XIX». En: M. Valera; C. López (eds.), *Actas del V Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de la Técnicas*, Murcia, Promociones y Publicaciones Universitarias, vol. 2, 1307-1317.

Anexo: Contenidos de las Lecciones de Geometría Analítica (1883; 1893; 1904)

1883	1893	1904	1ª Ed.	2ª Ed.	3ª Ed.
<b>ANÁLISIS DETERMINADO</b>					
	I			HOMOGENEIDAD	
	II			CONSTRUCCIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS	
	III			RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS	
<b>GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA</b>					
I	IV	I	DEL PUNTO	COORDENADAS CARTESIANAS DEL PUNTO	
	VI	III		TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS	
II	VII	IV	DE LA LÍNEA RECTA	ECUACIÓN DE PRIMER GRADO EN COORDENADAS CARTESIANAS	
	V	II		REPRESENTACIÓN DE LUGARES GEOMÉTRICOS POR ECUACIONES	
III	VIII	V	SISTEMA DE COORDENADAS DIFERENTES DEL CARTESIANO I.- Coordenadas polares II.- Coordenadas tangenciales III.- Coordenadas trilineales	DE LA LÍNEA RECTA EN COORDENADAS POLARES	
	IX	VI		DE LA LÍNEA RECTA EN COORDENADAS TRILINEALES	
	X	VII		COORDENADAS TANGENCIALES. LEY DE LA DUALIDAD	
IV	XI	VIII	TEORÍAS SUPERIORES DE LA RECTA	PROPIEDADES PROYECTIVAS	
V	XIV	XI	DISCUSIÓN DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO	DISCUSIÓN DE LA ECUACIÓN CARTESIANA DE SEGUNDO GRADO	
VI	XV	XII	TEORÍAS GENERALES I.- Centro II.- Diámetros III.-Tangentes IV.- Polo y polar V.- Asíntotas	SECCIONES CÓNICAS. TEORÍAS GENERALES I.- Tangentes y normal II.- Polo y polar III.- Centro IV.- Diámetros V.- Asíntotas VI.- Focos	

VII	XVI	XIII	REDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO		
VIII			ELIPSE E HIPÉRBOL I.- Elipse II.- Hipérbol III.- Diámetros conjugados		
IX			FOCOS Y DIRECTRICES		
XX			DE LA PARÁBOLA		
	XII	IX	DE LA CIRCUNFERENCIA I.- Coordenadas cartesianas y polares II.- Coordenadas trilineales III.- Coordenadas tangenciales		
	XIII	X	SISTEMAS DE CÍRCULOS I.- Ejes radicales II.- Centros de semejanza		
	XVII	XIV	PROPIEDADES PRINCIPALES DE LAS CÓNICAS I.- Forma de las cónicas -I II.- Focos y directrices -III III.- Construcción de las cónicas -IV IV.- Tangente y normal -II V.- Diámetros -VI Círculos focales -V VI.- Teorías complementarias		
XI	XVIII	XV	COORDENADAS TRILINEALES Y TANGENCIALES DE LAS CÓNICAS	COORDENADAS TRILINEALES Y TANGENCIALES DE LAS CÓNICAS I.- Coordenadas trilineales II.- Coordenadas tangenciales III.- Teoremas notables	
XII	XIX	XVII	TRANSFORMACIÓN DE FIGURAS I.- Figuras homotéticas I.- Homotecia I.- Homografía II.- Transformación correlativa II.- Transformación correlativa II.- Afinidad III.- Homografía III.- Homografía III.- Semejanza IV.- Homología IV.- V.- Formas involutivas V.- Curvas inversas VI.- Figuras correlativas VII.- Figuras polares VIII.- Curvas inversas		
XIII	XX	XVI	CURVAS DE ORDEN m		
<b>GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO</b>					
	XXI			TEORÍA DE LAS PROYECCIONES I.- Proyección sobre un eje II.- Proyección sobre un plano	
XIV	XXII	XVIII	DEL PUNTO EN EL ESPACIO I.- Coordenadas rectilíneas II.- Interpretación de ecuaciones III.- Coordenadas polares o esféricas IV.- Transformación de coordenadas V.- Clasificación de superficies		

XV	XXIII	XIX	RECTAS Y PLANOS I.- Problemas sobre la recta II.- Problemas sobre el plano III.- Menores distancias		
XVI	XXIV	XX	ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN COORDENADAS TETRAÉDRICAS Y TANGENCIALES I.- Coordenadas tangenciales II.- Propiedades proyectivas III.- Coordenadas tetraédricas	COORDENADAS TETRAÉDRICAS Y TANGENCIALES I.- Coordenadas tetraédricas II.- Coordenadas tangenciales III.- Propiedades proyectivas	
	XXV	XXI	DE LA ESFERA		
XVII	XXVI	XXII	TEORÍAS DEL CENTRO Y DE LOS PLANOS DIAMETRALES EN LAS SUPERFICIES DE 2º ORDEN I.- Centro II.- Planos diametrales y diámetros III.- Planos principales	SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN I.- Contacto y polaridad II.- Centro III.- Planos diametrales y diámetros IV.- Planos principales	
XVIII	XXVII	XXIII	CLASIFICACIÓN DE LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN		
XIX	XXVIII	XXIV	FORMA DE LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN I.- Elipsoide II.- Hiperboloide de una hoja III.- Hiperboloide de dos hojas IV.- Paraboloides elíptico V.- Paraboloides hiperbólico VI.- Secciones cíclicas		
XX			GENERATRICES RECTILÍNEAS I.- Hiperboloide de una hoja II.- Paraboloides hiperbólico		
XXI			CONTACTO Y POLARIDAD EN LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN		
XXII	XXXI		INTERSECCIÓN DE SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN I.- Homotecia y semejanza II.- Intersección	DETERMINACIÓN, INTERSECCIÓN Y SEMEJANZA DE LAS SUPERFICIES DE 2º ORDEN I.- Determinación II.- Homotecia y semejanza III.- Intersección	
	XXXIX	XXV		PROPIEDADES DE LAS SUPERFICIES DE 2º ORDEN Coordenadas tangenciales -I I.- Secciones cíclicas -II II.- Generatrices rectilíneas del hiperboloide -III III.- Generatrices rectilíneas del paraboloides -IV IV.- Plano tangente y normal -V V.- Plano diametral y diámetro -VI	

XXIII	XXX II	XXVI	GENERACIÓN DE SUPERFICIES I.- Superficies en general II.- Superficie cilíndrica III.- Superficie cónica IV.- Superficies conoides V.- Superficies de revolución	GENERACIÓN DE SUPERFICIES I.- Superficies en general II.- Superficies desarrollables III.- Superficies alabeadas
XXIV	XXX		LEY DE LA DUALIDAD EN LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN I.- Coordenadas tangenciales -II II.- Coordenadas tetraédricas -I Tetraedros notables -III	
XXV	XXX III	XXV III	TRANSFORMACIÓN DE SUPERFICIES I.- Figuras polares y recíprocas II.- Transformación homográfica III.- Transformación homológica	T. DE FIGURAS I. -Homografía II.- Afinidad III.- Semejanza IV.- Homología V.- Formas involutivas VI.- Figuras correlativas VII.- Figuras polares